1192. 對稱群ノ表現ニ就テ（I）

大島　勝（高知高校）

対稱群 S_n ノ表現ニ就テハ G. Frobenius 以来多数ノ人々特ニ I. Schur, A. Young 及ビ H. Weyl ニヨリ深ク研究サレテ色々ノ事実ガ明カニサレテキル。最近ニ至リ中山氏ハ所謂 diagsam ニ hook ナル概念ヲ導入サレテ二三ノ重要ナル結果ヲ得ラレタ[1]。本稿ニ於テハ第一章ニ於テ hook ニ関スル若干ノ性質ヲ述ベル、ソノ一部分ハ既ニ中山氏ノ得ラレタモノデアル。

第二章ニ於テハ hook ヲ用ヒテ diagram ノ構造ヲ調ベル。次ニソノ應用トシテ第三章ニ於テ S_n ノ既約表現及ビ自己共軛既約表現ノ個数ヲ与ヘル recurrence formula ヲ導ク、第三章マデハ既ニ一昨年ノ数物年会デ発表セルモノデアル、最後ノ第四章デハ未ダ殆ンド手ノツケテナイ S_n ノ modular 表現ノ问題、特ニ中山氏ニヨリ提出サレタ既約表現ノ block ヘノ distribution ノ问題ヲ考究スル[2]。

1. hook ノ諸性質

§1. Diagrams 自然数 n ノ分割

1)　$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_k$

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \alpha_k > 0,\ \alpha_i \text{ ハ整数}$$

ニ対應シテ

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h): \quad \begin{array}{l} \alpha_1 \ * * * * * * \\ \alpha_2 \ * * * * \\ \quad \cdots\cdots \\ \alpha_h \ * * \end{array}$$

ナルn個ノ文字ノ配列ヲ考ヘ、コレヲ分割(1)ニ対應スル diagram ト稱スルコトハ良ク知ラレテヰル。Tハ$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_h$ ニヨリ一意的ニ決定サレル次ニ

(2) $\quad \beta_i = \alpha_i + h - i$

トオケバ

(3) $\quad \sum_{i=1}^{h} \beta_i = n + \frac{1}{2} h(h-1), \quad \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_h > 0$

又Tノ第j列ニ於ケル文字ノ個数γ_jデ表セバ

(4) $\quad \sum_{j=1}^{k} \gamma_j = n, \quad \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots \geqq \gamma_k > 0, \ (k = \alpha_1)$

更ニ

(5) $\quad \delta_j = \gamma_j + k - j, \quad (k = \alpha_1)$

トオケバ

(6) $\quad \sum_{j=1}^{k} \delta_j = n + \frac{1}{2} k(k-1), \ \delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_k > 0$

ヲ得ル、α_i, β_i γ_j及ビδ_jヲ夫々Tノα-数, β-数, γ-数及ビδ-数トイフ。γ-数ガ$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ナル diagram ヲ$T[\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k]$又ハ$\Gamma[\gamma_j]$デ表ハス。

T(α_i) ニ於テ $i \leqq x$, $j \leqq y$ ヲ満足スル (x,y) ヲ座標トスル文字ノナス *diagram* ヲ T(i,j) デ表ハス。T ヨリ T(i,j) ヲ取去ルコトニヨッテ得ラレル *diagram* ヲ T$^*(i,j)$ デ表ハス、即チ T ハ T(i,j) ト T$^*(i,j)$ ナル二ツノ *diagram* ニ分解サレルワケデアル。

（例）

T	T(3,2)	T*(3,2)
$j=2$		
* * * * *	* *	* * * * *
* * * *	* *	* * * *
$i=3$ * * *		*
* * *		*

T(α_i) ヲ *transpose* スルコトニヨリ各行ガ $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 個ノ文字ヨリナル *diagram* ヲ得ル、コレヲ *Frobenius* ニ従ッテ T ノ共軛 *diagram* トイヒ $\tilde{\mathrm{T}}$ デ表ハス、特ニ T $=\tilde{\mathrm{T}}$ ナルトキハ T ヲ自己共軛 *diagram* トイフ。

§2. *Hooks* T(α_i) ニ於テ (i,j) ヲ $\alpha_i \geqq j$ ヲ満足スル二数トスレバ T ノ第 i 行ト第 j 例ハ交ハル、ソノ交点ノ座標ハ (i,j) デアル $x=i$, $y \geqq j$, 又ハ $x \geqq i$, $y=j$ ヲ満足スル (x,j) ヲ座標トスル文字ハ┌字形ヲナスガ、コレヲ以後 T ノ (i,j)-*hook* H 又ハ単ニ T ノ *hook* H トイフ、H ニ於ケル文字ノ個数ヲソノ長サ又垂直部分ノ長サヲ H ノ高サトイフ。長サ

g ナル hook ヲ g-hook ト書クコトニスル。）

n個ノ文字ヨリナル diagram T ノ一ツノ hook ヲ H, ソノ長サヲ g トスル、今 H ヲ取去リ H ノ右方及ビ下方ニアル文字ヲ左方, 上方ヘト動カスコトニヨリ $(n-g)$個ノ文字ヨリナル diagram T' ヲ得ル、コノトキ $T'=T-H$ ト表ハス、T ノ二ツノ hook ヲ H_1, H_2 トシソノ長サヲ夫々 g_1, g_2 トスル、尚 H_1, H_2 ノ座標ヲ夫々 $(i,j),(s,t)$ トシ $i \neq s, j \neq t$ トスル。$T'=T-H_1$ トスレバ T' ハ H_2 ニヨリ決定サレル g_2-hook H_2' ヲモツ、故ニ $T''=(T-H_1)-H_2$ トスル、他方 $T^*=T-H_2$, H_1 ニヨリ決定サレル g_1-hook H_1^* ヲモツ $T^*-H_1^*=(T-H_2)-H_1^*=T^{**}$ トスレバ $T''=T^{**}$ トナル

(7) $(T-H_1)-H_2' = (T-H_2)-H_1^*$

T ノ hook H ノ長サヲ g トスル、$g=g_1+g_2$ ナルトキハ T ハ g_1-hook H_1 カ又ハ g_2-hook H_2 ヲモツ、前者ノ場合ハ $T-H_1$ ハ g_2-hook H_2' ヲモチ

$$T-H=(T-H_1)-H_2'$$

後者ノ場合ハ $T-H_2$ ハ g_1-hook H_1' ヲモチ

$$T-H=(T-H_2)-H_1'$$

トナル、従ツテ特ニ $g=rg'$ ナルトキハ H ハ r個ノ g'-hook ニ分解サレル T ヨリ hook H ヲ取去ツテ T_1 ヲ得タトキ、我々ハ $T_1=H$ ヲ添加可能デアルトイ

フ。以下長サガ素数 p ノ倍数ナル hook ノミヲ考ヘルカラTガ p-hook ヲモタナイトキ、Tヲ p-regular デアルトイフ。

$\boxed{\text{定理}}$1. n 個ノ文字ヨリナル p-regular diagram ヲ $T(\alpha_i)$ トスル、各 $r=1, 2, \cdots, P$ ニ對シテ高サ r ノ p-hook H_r ヲTニ添加出来ル、且ツ同一ノ r ニ対シテハ H_r ヲ添加シテ出来ル diagram ハ一意的ニ決定サレル。

（証明） $n=0$ ナルトキハ定理ハ成立スルカラ，n ヨリ小ナルトキハ定理ハ成立スルト假定スル、従ツテ $T(2,1)$ ニツイテハ定理ハ成立スルカラ $T(2,1)=T'-H_r$ トシ，T' ノ αー数ヲ $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_\ell'$ トスル、以下次ノ二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル。

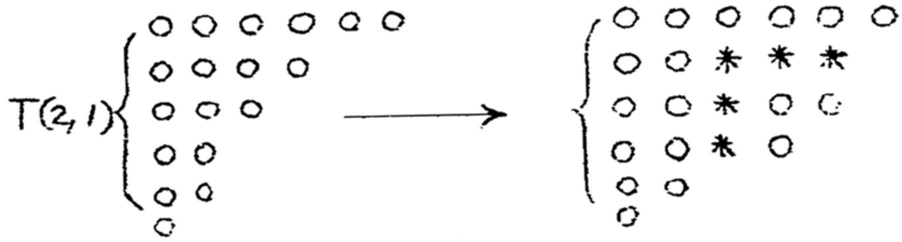
(i) $\alpha_1' \leqq \alpha_1$ ナルトキ： $\alpha_1' \leqq \alpha_1$ ナル故 T' ノ上方ヘ $T^*(2,1)$ ヲ加ヘルコトニヨリ得ラレル diagram ヲ T'' トスレバ明カニ $T=T''-H_r$ ガ成立スル。

(ii) $\alpha_1' > \alpha_1$ ナルトキ： $\alpha_1' > \alpha_1$ ナル故 $\alpha_1' \neq \alpha_2$ 従ツテ T' ニ於ケル H_r ノ座標ハ $(1,j)$ トナル、T' ノ γー数ヲ $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_m'$ トスレバ $r=\gamma_j' > \gamma_{j+1}'$ ナルトキハ $r < \gamma_{j-1}$, $\gamma_j > r$ ガ成立スル。但シ γ_i ハTノ γー数デアル。従ツテTハ $(1,j)$ ナル位置ニ H_r ヲ添加可能、又 $r=\gamma_j'=\gamma_{j+1}'=\cdots=\gamma_{j+n}' > \gamma_{j+n+1}'$ ナルトキハTハ $(1,j+n)$ ナル位置ニ H_r ヲ

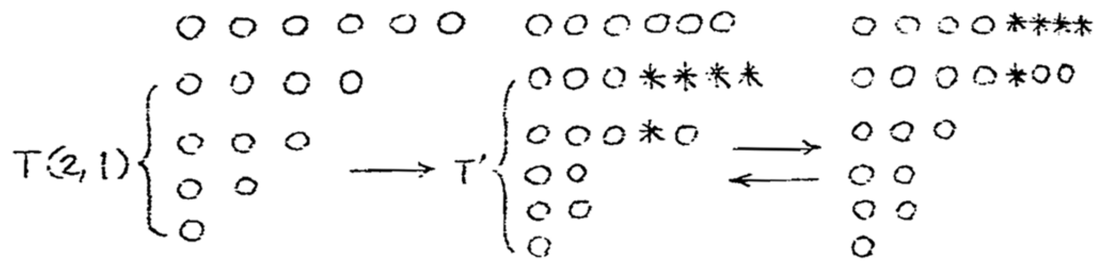
添加可能デアル。故ニTニハ各rニツイテH_rガ添加可能ナルコトガ分ツタ。次ニ添加ガ一意的ナルコトヲ証明スルーツノrニ対シH_rヲ添加シテ二ツノdiagram T_1, T_2ヲ得タトスル。H_rノ座標ヲ夫々(i, j), (s, t)トスル. $i=s, j=t$ナルトキハ$T_1=T_2$、故ニ$i \neq s$, $j \neq t$ノ場合ヲ考ヘル、$1<i$, $1<s$ナルトキハ$T_1(2,1)-H_r=T(2,1)$, $T_2(2,1)-H_r=T(2,1)$、故ニ帰納法ノ仮定ニヨリ、$T_1(2,1)=T_2(2,1)$ 従ッテ$T_1=T_2$ 故ニ残サレタ場合ハ$i=1$又ハ$s=1$ナルトキデアル $i=1$, $1<s$トスル。T_1カラ(ii)ノ場合ノ逆ノ操作ニヨリ$T_1^*-H_r=T(2,1)$ナルdiagram T_1^*ヲ得ル、ソノα-数ヲ(α_i^*)トスレバ$\alpha_1<\alpha_1^*$ガ成立スル、他方$1<s$ナル故$T_2(2,1)-H_r=T(2,1)$トナリ$T_2(2,1)$ノα-数ヲ$(\alpha_i^{(2)})$トスレバ$\alpha_1^{(2)}<\alpha_1$ガ成立スル従ッテ$T_1^* \neq T_2(2,1)$トナリ$T(2,1)$ニH_rヲ添加シテ相異ナルdiagramヲ得ルコト、ナル、コレハ帰納法ノ仮定ニ反ス、故ニ$i=1$ナルトキハ$s=1$トナリ$T_1=T_2$ コレデ定理ハ完全ニ証明サレタ。

(例) $P=5$

(i)ノ場合　　T



(ii)ノ場合　　T



$$T(2,1)=T'-H_2$$

定理１ト同様ニシテ

$\boxed{\text{定理 2}}$　Tヲ n 個ノ文字ヨリナル p-regular diagram トスル、各 $r=1,2,\cdots,l_p$ ニ対シテ高サ r ノ l_p-hook H_r ヲTニ添加可能デアル、且ツ同一ノ r ニ対シテハ H_r ヲ添加シテ出来ル diagram ハ一意的ニ決定サレル。

__Lemma 1.__ diagram　Tが高サ r ノ p-hook H_r ヲモタナケレバTニ H_r ヲ添加可能デアル、且ツ添加ハ一意的デアル。

（証明）定理１ト同様デアル。

__Lemma 2__　$T(\alpha_i)$ が高サ r ノ p-hook H_r ヲ k 個モテバ、$T(\alpha_i)$ ニ H_r ヲ添加スルコトニヨリ $(k+1)$ 個ノ相異ナル diagram ヲ得ル。

（証明）$k=0$ ナルトキハ Lemma １トナル、故ニ k ヨリ小ナルトキハ成立スルト假定スル．k 個ノ H_r ノ中列ノ座標ノ最小ナルモノヲＨトシ、ソノ座標ヲ $(i.j)$ トスル　$T(1,j+1)$ ハ $(k-1)$ 個ノ H_r ヲモチ、

T$(i+1,1)$ ハ H_r ヲモタナイ、又 T$(1,j+1)$ ノ α-number ハ $\alpha_1-j, \alpha_2-j, \cdots$ トナリ、特ニ $\alpha_i-j=p-r$ ガ成立スル帰納法ノ仮定ニヨリ T$(1,j+1)=H_r$ ヲ添加シテ k 個ノ相異ナル diagram Δ_λ $(\lambda=1,2,\cdots,k)$ ヲ得ルガ Δ_λ ニ於ケル添加シタ H_r ノ座標ヲ $(s^{(\lambda)}, t^{(\lambda)})$ トスレド $\alpha_i-j=p-r$ ナル故 $s^{(\lambda)}\leqq i$ $(\lambda=1,2,\cdots,k)$ 従ッテ Δ_λ ノ γ 数ヲ $(\sigma_i^{(\lambda)})$ トスレバ $\sigma_1^{(\lambda)}\leqq\gamma_j$ トナル 但シ γ_j ハ T ノ第 j 列ノ文字ノ個数デアル、故ニ Δ_λ ノ左方ニ $T^*(1,j+1)$ ヲ加ヘルコトニヨリ T$=H_r$ ヲ添加シタ diagram ヲ k 個得ル、同様ニ T$(i+1,1)$ ニツイテ考ヘ、T$=H_r$ ヲ添加シタ diagram ヲ一個得ル、コレラ$(k+1)$個ガ相異ナルコトハ明カデアル。$(k+1)$個以上ナイコトモ容易ニ分ル。

定理 3 diagram T ガ k 個ノ p-hook ヲモテバ T ニ高サ r $(r=1,2,\cdots,p)$ ノ p-hook ヲ添加スルコトニヨリ $(p+k)$ 個ノ相異ナル diagram ヲ得ル。

（証明） Lemma 2 ヨリ明カデアル。

2. diagram ノ構造

§3. Normal hook p-regular diagram

T ニ高サ r ノ lp-hook H ヲ添加シテ出来ル diagram ヲ T′ トシ T′ ニ於ケル H ノ座標ヲ (i,j) トスル、T′ ハ §2 ニヨリ p-hook ヲモツガ、p-hook ノ位置ニツイテハ次ノ三ツノ場合ガ考ヘラレル即チ

$T(i+1,1)$ハH_rヲモタナイ、又$T(1,j+1)$ノα-number ハ$\alpha_1-j, \alpha_2-j, \cdots$トナリ、特ニ$\alpha_i-j=p-r$ガ成立スル帰納法ノ假定ニヨリ$T(1,j+1)=H_r$ヲ添加シテ$k$個ノ相異ナルdiagram $\Delta_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,k)$ヲ得ルガ$\Delta_\lambda$ニ於ケル添加シタ$H_r$ノ座標ヲ$(s^{(\lambda)}, t^{(\lambda)})$トスレド$\alpha_i-j=p-r$ナル故 $s^{(\lambda)}\leqq i\ (\lambda=1,2,\cdots,k)$ 従ツテΔ_λノr数ヲ$(\sigma_i^{(\lambda)})$トスレバ$\sigma_1^{(\lambda)}\leqq r_j$トナル 但シ$r_j$ハ$T$ノ第$j$列ノ文字ノ個数デアル、故ニ$\Delta_\lambda$ノ左方ニ$T^*(1,j+1)$ヲ加ヘルコトニヨリ$T=H_r$ヲ添加シタdiagramヲ$k$個得ル、同様ニ$T(i+1,1)$ニツイテ考ヘ、$T=H_r$ヲ添加シタdiagramヲ一個得ル、コレラ$(k+1)$個ガ相異ナルコトハ明カデアル。$(k+1)$個以上ナイコトモ容易ニ分ル。

$\boxed{\text{定理3}}$ diagram Tガk個ノp-hookヲモテバTニ高サ$r\ (r=1,2,\cdots\cdots,p)$ノ$p$-hookヲ添加スルコトニヨリ$(p+k)$個ノ相異ナルdiagramヲ得ル。

（証明）Lemma 2ヨリ明カデアル。

2. diagramノ構造

§3. Normal hook p-regular diagram

Tニ高サrノlp-hook Hヲ添加シテ出来ルdiagramヲT'トシT'ニ於ケルHノ座標ヲ(i,j)トスル、T'ハ§2ニヨリp-hookヲモツガ、p-hookノ位置ニツイテハ次ノ三ツノ場合ガ考ヘラレル即チ

$(*, j)$ナルp-hookヲ一ツモツ場合，$(i,*)$ナルp-hookヲ一ツモツ場合及ビ$(*,j)$ナルp-hookト$(i,*)$ナルp-hookヲモツ場合トデアル。第一ノ場合即チ$(*,j)$ナル座標ヲモツp-hookノミヲT'ガモッテ牛ルトキHヲT'ノnormal lp-hook又ハ単ニnormal hookトイフ。尚$(*,j)$ナル座標ヲモツp-hookヲHノfirst p-hookトイヒ$H^{(1)}$デ表ハス、Hガnormal hookナルトキTハ$(*,j)$ナル座標ヲモツ$l'p$-hook，$(1\leqq l'\leqq l)$ヲモツ　コノhookヲHノ$l'p$-hookトイフ。T'ヨリ$H^{(1)}$ヲ取去ッテ出来ルdiagram T_2ハ$(l-1)p$-hook H'ヲモツ．H'ノ座標ヲ(i,j_2)トスレバT_2ハ座標$(*,j_2)$ナルp-hook $H^{(2)}$ヲ只一ツモツカラ、H'ハT_2ノnormal hookデアル。$H^{(2)}$ヲHノsecond p-hookトイフ．カクHヲ$H^{(1)}$ヨリ始メテ次々ニ下方カラp-hookヲ取去ルコトニヨリ最後ニ$(i,*)$ナル座標ヲモツp-hook $H^{(l)}$ヲ得ル、コレヲHノlast p-hookトイフ、尚T'ハHニヨリ一意的ニ決定サレルカラ

$$(8)\qquad T'=T\oplus H$$

ト書ク、$\oplus$ハ添加ガ一意的ナルコトヲ示ス。

<u>Lemma 3</u> p-regular diagram Tニ高サr $(r=1,2,\ldots,lp)$ノlp-hook H_rヲ添加シテ得ラルゝlp個ノdiagramノ中．H_r

ヲ normal hook トシテモツモノガ丁度 p 個存在スル、コレラノ p 個ノ normal hook ノ last p-hook ノ高サヲ ν トスレバ $\nu=1, 2, \cdots, p$ トナル。

（証明）定理1ト同様ニシテ出来ル。

Lemma 3 ニヨリ normal hook ハ長サ lp ト last p-hook ノ高サ ν ニヨリ特徴ヅケラレルコトガ分ッタ。故ニ以下コレヲ $H(l, \nu)$ デ表ハス。

T ヲ p-regular ナラザル diagram トシ、T ノモツ長サ p ノ倍数ナル hook ノ中列ノ座標 j ノ最大ナルモノデ、更ニ長サ最大ナルモノヲ H_1, ソノ長サヲ $l_1 p$ トスル、H_1 ノ座標ヲ (i_1, j_1) トスル、$\mathrm{T}(1, j)$ ヲ考ヘレバ H_1 ハ上ニ定義シタ意味ニ於テ $\mathrm{T}(1, j_1)$ ノ normal hook デアル。従ッテ H_1 ヲ又 T ノ normal hook トイフコトニスル。次ニ $T_2=T-H_1$ ノ normal hook ヲ $H_2(l_2, \nu_2)$ トスル。カク normal hook $H_1, H_2, \cdots$ ヲ次々ニ取リ去ルコトニヨリ遂ニ p-regular diagram T_0 ニ到達スル。(7) ニヨリ T_0 ハ T ニヨリ一意的ニ決定サレル故ニ T_0 ヲ T ノ kernel トイフ。

(9) $\quad T=T_0 \oplus H_s(l_s, \nu_s) \oplus H_{s-1}(l_{s-1}, \nu_{s-1}) \oplus \cdots \oplus H_1(l_1, \nu_1)$

(9) ヲ normal hook ニヨル T ノ分解トイフ、コノ

分解ガ一意的デアルコトハ明カデアル。H_λ ヲTノ第八番目ノ normal hook トイフ。

次ニ ν_i ノ中等シイモノヲマトメ且ツ同ジ ν_i ニ属スル l_λ ヲ大サノ順ニ次ノ如ク並ベル。

$$(10)\quad (l_1^{(1)} \geqq l_2^{(1)} \geqq \cdots\cdots \geqq l_{s_1}^{(1)} \geqq 0,\ 1),\ (l_1^{(2)} \geqq l_2^{(2)} \geqq \cdots\cdots \geqq l_{s_2}^{(2)} \geqq 0,\ 2)\ \cdots\cdots,\ (l_1^{(p)} \geqq l_2^{(p)} \geqq \cdots\cdots \geqq l_{s_p}^{(p)} \geqq 0,\ p)$$

但シ $\sum^{p} s_i = s$

コヽニ $\sum_{i=1}^{s_i} l_i^{(\nu)} = t_\nu$ トスレバ

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{s} l_i = \sum_{\nu=1}^{p} t_\nu = l$$

但シ l ハTヨリ T_0 ニ到達スルマデニ取去ル p-hook ノ個数デアル。

diagram T ヲ (10) ナル数系ニ対應サセルコトニスル、以下コノ対應ガ一対一ナルコトヲ証明スル。

Lemma 4　p-regular diagram $T_0(\alpha_i)$ ニ於テ $\alpha_i < p - \gamma$ トスル、高サ ν ノ p-hook H ヲ添加シタ diagram ヲ $T.H$ ノ座標ヲ (i,j) トスレバ $1<j$ ナルトキ $\nu \geqq \gamma$, $j=1$ ナルトキ $\gamma < \nu$ ガ成立スル。

Lemma 5　(9) ニ於ケル各 normal hook H_λ ノ first p-hook ノ高サヲ $\mu_1, \mu_2, \cdots\mu_s$ トスレバ

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \mu_s$$

（証明） $T_s = T_0 \oplus H_s$ ニ於テ H_s ノ *first p-hook* $H_s^{(1)}$ ノ座標ヲ(i,j)トスル．又 $T_{s-1} = T_0 \oplus H_s \oplus H_{s-1}$ ニ於テ H_{s-1} ノ *first p-hook* $H_{s-1}^{(1)}$ ノ座標ヲ(u,v)トスル $j<v$ ナル故 $u<i$ トナル、従ッテ T_{s-1} $(u, j+1)$ ニ Lemma 4 ヲ適用スルコトニヨリ $\mu_{s-1} \leqq \mu_s$，同様ニシテ $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \mu_s$ ヲ得ル。

$T = T_0 \oplus H(1, r_1) \oplus H'(\ell, r_2)$ ニ於テ H, H' ノ座標ヲ $(i,j), (i',j')$ トスル、コノトキ次ノ三ツノ場合ガ考ヘラレル。

(i) $j' < \alpha_i + 1$

(ii) $j' = \alpha_i + 1$

(iii) $j' > \alpha_i + 1$

但シ α_{i_1} ハ $T_0 \oplus H$ ノ第 i 行ノ文字ノ個数トスル(i)ノ場合ニハ H' ハ H ノ水平部分ヲ切ルトイフ(ii)ノ場合ハ H ト H' ハ連結サレテ T ハ (i',j) ナル座標ヲモツ $(\ell+1)$ *p-hook* H^* ヲモツ、(iii)ノ場合ニハHトH'ハ離レテヰルカラ、コノトキ互ニ独立デアルトイフ、H' ノ *first p-hook* ノ高サヲ μ トスルトキ(iii)ガ成立スルトキハ $\mu < r_1$ トナル。又 $r_1 = \mu$ ナルトキハ(iii)ガ成立シナイコトモ定理1ニヨリ容易ニ分ル。

<u>*Lemma 6*</u> $T = T_0 \oplus H(1, r) \oplus H'(\ell, r')$ ニ於テ H, H'

ノ坐標ヲ夫々 (i,j), (i',j') トスル $j'=\alpha_i+1$ ガ成立スルノハ $l=1$ ナルトキニ限ル。但シ α_i ハ $T_0 \oplus H$ ノ第 i 行ノ文字ノ個数デアル。

（証明）$j=\alpha_i+1$ ナルトキハ H ト H' ハ連結サレル故ニ H' ノ $(l-1)$ p-hook ノ座標ヲ (i^*,j') トスレバ $T-H'=T_0\oplus H(1,r)$ ガ (i^*-1,j) ナル位置ニ lp-hook ヲモツコトニナリ。$1<l$ ナルトキハ矛盾ヲ来ス。

（例）$l=3$ ナルトキ H'

$$
\begin{array}{llll}
 & *22222 & & *33222 & & *33 \\
 & *2** & & *322 & & *3 \\
 & *2* & \longrightarrow & 332 & \longrightarrow & 33 \\
 & *2* & & 322 & & 3 \\
 & 12 & & 12 & & 1 \\
H & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

<u>lemma 7</u>　diagram T ニ於テ高サ r_2 ノ p-hook H_2 ガ高サ r_1 ノ p-hook H_1 ノ水平部分ヲ切ツテキルトスル H_1, H_2 ノ座標ヲ夫々 (i_1,j_1), (i_2,j_2) トスレバ T ハ (i_1+1,j) ニ高サ r_1-1 ノ p-hook H_1^* ヲモツ　$T-H_1^*$ ハ H_2 ニヨツテ決定サレル p-hook H_2' ヲモチ、H_2' ノ高サハ r_2-1, 座標ハ $(i,j'-1)$ トナル。

Lemma 8. $T = T_0 \oplus H_s \oplus H_{s-1} \oplus \cdots \oplus H_1$ トスルトキ T_0 ヲ kernel ニモテ数系(10)ニ対應スル diagram ハ T以外ニハ存在セズ。

(証明) $s=1$ ナルトキハ Lemma 3 トナリ定理ハ成立スルカラ s ヨリ小ナルトキハ定理ハ成立スルト假定スル数系(10)ニ対應スル任意ノ diagram ヲ T' トシ。

(12) $T' = T_0 \oplus H'_s(l'_s, \nu'_s) \oplus H'_{s-1}(l'_{s-1}, \nu'_{s-1}) \oplus \cdots \oplus H'_1(l'_1, \nu'_1)$ トシ、$T = T'$ トナルコトヲ証明スル。

T ノ normal hook H_i ノ中長サ l_p ノ最小ナルモノノ中デ番号 i ノ最小ナルモノヲ $H_t(l_t, \nu_t)$ トスル。

(13) $l_t < l_i \quad (i = t-1, t-2, \cdots 1)$

T' ニ於テ (l_t, ν_t) ニ対應スル normal hook H'_λ ノ中番号 λ ノ最小ナルモノヲ $H_r'(l_r', \nu_r')$ トスル。

(14) $l_t = l_r' < l_i' \quad (i = r-1, r-2, \cdots, 1)$

$$\nu_t = \nu_r'$$

以下次ノ二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル。

(i) $t = r$ ナルトキ, T, T' ヨリ夫々 $H_1, H_2, \cdots, H_t$: $H_1', H_2', \cdots, H_t'$ ニ属スル $l_t p$-hook ヲ次々ニ

取リ去ルコトニヨリ

$$\Sigma = T_0 \oplus H_s \oplus \cdots\cdots \oplus H_{t+1} \oplus H_{t-1}(l_{t-1}-l_t, \nu_{t-1})$$
$$\oplus \cdots \oplus H_1(l_1-l_{t-1}, \nu_1)$$
$$\Sigma' = T_0 \oplus H_s' \oplus \cdots\cdots \oplus H_{t+1}' \oplus H_{t-1}'(l_{t-1}', l_t, \nu_{t-1}')$$
$$\oplus \cdots\cdots \oplus H_1'(l_1'-l_t, \nu_1')$$

ヲ得ルガ帰納法ノ仮定ニヨリ $\Sigma = \Sigma'$ 従ツテ $T = T'$ ヲ得ル。

(ii) $t \neq r$ ナルトキ（$t > r$ トス）. T, T' ヨリ夫々 $H_1, H_2, \cdots\cdots, H_t$; $H_1', H_2', \cdots\cdots H_t'$ ニ属スル $(l_t - 1)$ p-hook ヲ次々ニ取去ルコトニヨリ得ル diagram ヲ D, D' トスレバ, D, D' ノ normal hook ノ first p-hook ノ高サニツイテハ Lemma 5 ニヨリ

$$D: \mu_s \geqq \mu_{s-1} \geqq \cdots\cdots \geqq \nu_t \geqq \lambda_{t-1} \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_1$$

$$D': \mu_s' \geqq \mu_{s-1}' \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_t' \geqq \cdots \geqq \nu_t \geqq \lambda_{r-1}' \geqq \cdots\cdots$$
$$\geqq \lambda_1' \quad (\lambda_r' = \nu_t)$$

ヲ得ル。但シ $(\mu_i), (\mu_i')$ ハ夫々 T, T' ノ normal hook ノ first p-hook ノ高サデアル。

$$D = T_0 \oplus H_s \oplus \cdots\cdots \oplus H_{t+1} \oplus H_t^*(1, \nu_t) \oplus H_{t-1}^*$$
$$\oplus \cdots\cdots \oplus H_1^*$$

ニ於テ H_{t-1}^* ノ長サ $(l_{t-1} - l_t + 1)\,p$ ニ於テ $1 < l_{t-1} - l_t + 1$ ガ成立スル。 従ツテ Lemma 6 ニヨリ

H_t^* ノ水平部分ヲ H_{t-1}^* ガ切ツテキルカ、又ハ H_t^* ト H_{t-1}^* ハ独立トナルカイヅレカデアル。D ヨリ p-hook $H_t^*(1,\nu_t)$ ヲ取去レバ

$$\Delta = T_0 \oplus H_s \oplus \cdots\cdots \oplus H_{t+1} \oplus H_{t-1}^{**} \oplus \cdots\cdots \oplus H_1^{**}$$

ヲ得ル、H_{t-1}^{**} ノ first p-hook ノ高サヲ λ_{t-1}^{**} トスレバ H_t^* ノ水平部分ヲ H_{t-1}^* ガ切ツテキルトキハ Lemma 7 ニヨリ $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda_{t-1} - 1$ トナリ $\lambda_{t-1}^{**} < \nu_t$ ガ成立スル。H_t^* ト H_{t-1}^* ガ独立ナルトキハ $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda_{t-1} < \nu_t$ トナリイヅレニシテモ $\lambda_{t-1}^{**} < \nu_t$ 故ニ Δ ニ於テ

$$(15) \quad \mu_s \geqq \mu_{s-1} \geqq \cdots\cdots \geqq \mu_{t+1} > \lambda_{t-1}^{**} \geqq \lambda_{t-2}^{**} \geqq \cdots \geqq \lambda_1^{**}$$

ヲ得ル、同様ニシテ D′ ヨリ $H_r'(1,\nu_t)$ ヲ取去ツタ diagram ヲ Δ' トスレバ Δ' ノ normal hook ノ各 first p-hook ノ高サノ間ニハ次ノ関係ヲ得ル。

$$(16) \quad \mu_s' \geqq \mu_{s-1}' \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_t' \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_{r+1}' > \lambda_{r-1}'' \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_1'' \quad (\lambda_{r+1}' \geqq \nu_t \ , \ \lambda_{r-1}'' < \nu_t)$$

帰納法ノ假定ニヨリ $\Delta = \Delta'$ 故ニ $\lambda_{t-1}^{**} = \lambda_t'$ トナル。然ルニ (15) (16) ニヨレバ $\lambda_{t-1}^{**} < \nu_t$, $\lambda_t' \geqq \nu_t$ ナル故 $\lambda_{t-1}^{**} \neq \lambda_t'$ トナリ矛盾ヲ来ス、従ツテ必ズ $t = r$ トナリ結局 $T = T'$ ヲ得ル。

Lemma 9　T ノ高サ r ナル lp-hook ヲ H_1 ソノ座標ヲ (i,j) トスル T, δ-数ヲ $\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots, \delta_n$ トスルトキ

$(\delta_p - \delta_j, p) = 1$, $(j < p)$ ナラバ

T ニ長サ $l'p$ $(l' = 1, 2 \cdots)$ ノ hook H' ヲ H ノ下端ニ於イテ H' ガ連結サレル如ク添加可能デアル。

(証明) $\delta_\rho - \delta < l'p$ ヲ満足スル最小ノ ρ ヲ σ トスレバ

$$\delta_\sigma - \delta_j - (j - \sigma) \leqq l'p + 2$$

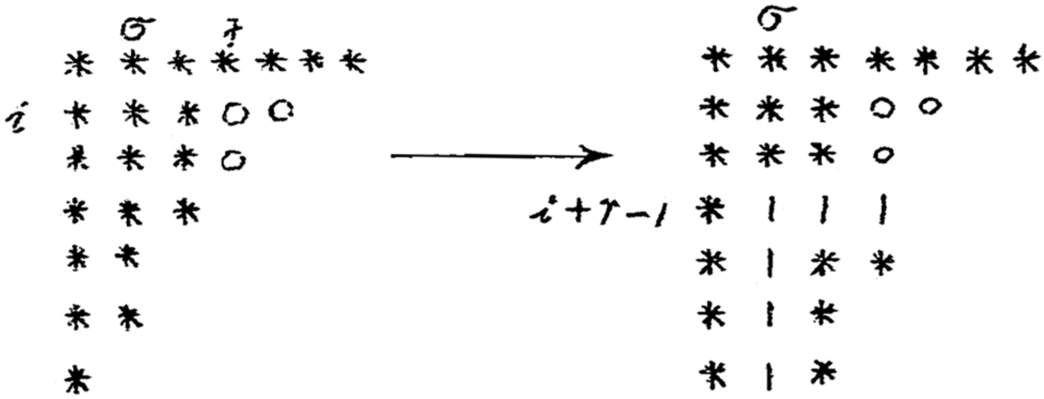
又 $\delta_\sigma - \delta_j < \delta_{\sigma+1} - \delta_j$ ナル故 $l'p + \leqq \delta_{\sigma+1} - \delta_j$

従ッテ

$$\delta_{\sigma+1} - \delta_j + 1 \geqq l'p + 2$$

従ッテ $(i+r, \sigma)$ ナル位置ニ高サ $l'p - j - \sigma$ ナル $l'p$-hook H' ヲ添加可能デアル。T ニ H' ヲ添加セル diagram ヲ T' トスレバ H ノ下端、H ノ右端ノ座標ハ夫々 $(i+r-1, j)$, $(i+r, j)$ トナルカラ H' ハ H ノ下端ニ於テ連結サレ、T' ハ (i, σ) ナル座標ヲモツ $(l+l')p$-hook H^* ヲモツ、H^* ハ H ト H' ニ分解サレル hook デアル。

(例) $p = 3$, $l = 2$



Lemma 10　T_0 ヲ kernel トシ任意ノ数系(10)ニ対應スル diagram ガ存在スル。

（証明）数系(10)ニ於テ $s=1$ ナルトキハ Lemma 3 トナリ定理ハ成立スルカラ s ヨリ小ナルトキハ成立スルト假定スル数系(10)ノ中 $l_i^{(\nu)} \neq 0$ ヲ含ム ν ノ中最小ナルモノヲ λ トシ、λ ニ属スル $l_i^{(\lambda)}$ ノ中最小ナルモノヲ $l_t^{(\lambda)}$ トスル、今数系(10)ヨリ $(l_t^{(\lambda)}, \lambda)$ ヲ除イタ数系(10) ヲ考ヘレバ帰納法ノ假定ニヨリコノ数系ニ対應スル diagram ハ存在スル．コレヲ T' トス

(17)　$T' = T_0 \oplus H'_{s-1} \oplus H'_{s-2} \oplus \cdots \oplus H'_1$

H'_1 ノ last p-look ノ高サヲ σ トスレバ $\lambda \leqq \sigma$
H'_1 ノ座標ヲ (μ, ν) トスレバ $T'(1, \nu+1)$ ハ p-regular デ、ソノ第 n 行ノ文字ノ個数 $\delta'_\mu = p - \sigma$
$T'(1, \nu+1) \oplus H(1, \lambda)$ ニ於テ $H(1, \lambda)$ ノ座標ヲ (m, n) トスレバ $m < \mu$ トナル故ニ $T'(1, \nu+1) \oplus H(1, \lambda)$ ノ左側ニ T' ノ第一列ヨリ第 ν 列マデヲ加ヘルコトニヨリ，T' ニ高サ λ ノ p-hook H ヲ $(m, n+\nu)$ ナル位置ニ於テ添加セル diagram ヲ得ル．コノ diagram ヲ T'' トスレバ

(18)　$T'' = T_0 \oplus H'_{s-1} \oplus H'_{s-2} \oplus \cdots \oplus H'_1 \oplus H(1, \lambda)$

トナル、T'' ノ δー数ヲ $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$ トスル $\delta_\rho - \delta_{n+\nu} = (l_t^{(\lambda)} - 1)p$, $(\rho < n+\nu)$ ナルトキハ Lemma 6 ニ於ケル証明ト同様ニシテ T' ガ $(l_t^{(\lambda)} - 1)p$ ナル長サノ

hook ヲモツコトニナリ $l_t^{(\lambda)}$ ガ最小ナルコトニ反ス
故ニ Lemma 9 ニヨリ $\delta_\rho - \delta_{n+\nu} < (l_t^{(\lambda)}-1)p$ ヲ満足スル最小ノ ρ ヲ σ トスレバ $(m+\lambda, \sigma)$ ナル位置ニ於テ $T'' = (l_t^{(\lambda)}-1)p$-hook H' ヲ添加シテ H' ガ $H(1,\lambda)$ ノ下端ニ連結スル如クナシ得シ、T'' ニ H' ヲ添加セル diagram ヲ T^* トスレバ、T^* ハ (m,σ) ナル座標ノ $l_t^{(\lambda)}p$-hook H^* ヲモチ H^* ハ H' ト H ニ分解サレル T^* ハ $(*,\sigma)$ ナル p-hook ヲモチ $(m,*)$ ナル p-hook ヲモタナイコトハ、我々ノ T^* ノ construction ヨリ明カデアル。従ツテ H^* ハ T^* ノ normal hook トナル。但シ first normal hook ニナルトハ限ラナイ。即チ T^* ニ於ケル H_t' ノ座標ヲ (i_t, j_t) トスルトキ $j_k < \sigma < j_{k-1}$ ナルトキハ

(19) $T^* = T_0 \oplus H'_{s-1} \oplus H'_{s-2} \oplus \cdots \oplus H'_k \oplus H^* \oplus H'_{k-1} \oplus \cdots \oplus H'_1$

トナル、H^* ノ last p-hook ハ明ラカニ H ナル故ソノ高サハ λ デアル、従ツテ H^* ハ $(l_t^{(\lambda)}, \lambda)$ ニ対應スルモノデアル。故ニ T^* ハ求ムル数系(10) ニ対應スル diagram デアル。

以上ニヨリ我々ノ目的ナル次ノ定理ヲ得ル。

定理4 p-regular diagram T_0 ヲ kernel トシ, l 個ノ p-hook ヲ次々ニ添加シテ得ラレル diagram ト数系(10) ハ一対一ノ対應ヲナス、

数系(10) ノ個数ヲ $M(l)$ トスレバ

(20) $M(l)=\sum_{l=t_1+t_2+\cdots+t_p} N(t_1)N(t_2)\cdots N(t_p)$

但シ$N(t_i)$ハ対称群S_{t_i}ノ diagram ノ個数デアル。

$\boxed{\text{定理5}}$ p-regular diagram T_0 ヲ kernel トシ，l個ノp-hook ヲ次々ニ添加シテ得ラレル diagram ノ個数ハT_0ニ無関係デ$M(l)$デ与ヘラレル。

S_n ニ於テ $n=kp+r$ $(0\leqq r<p)$ トスル．又S_nノp-regular diagram ノ個数ヲ$f(n)$デ表ハスコトニスレバS_nノ diagram ノ個数$N(n)$ハ定理5ニヨリ次式ニテ与ヘラレル。

(21) $N(n)=\sum_{l=0}^{k} f(n-lp)M(l)$

S_nノ既約表現ノ個数ハ、ソノ diagram ノ個数ニ等シキ故

$\boxed{\text{定理6}}$ 對稱群S_nノ既約表現ノ個数ハ(21)デ与ヘラレル。

3. S_nノ既約表現ノ個数

§4. S_nノ既約表現ノ個数 本章ニ於テハ$p=2$トスル．従ツテ長サガ偶数ナル hook ヲモタナイ diagram ヲ regular diagram トイフコトニスル。

Lemma 11. $T(k, k-1, \cdots, 2, 1)$ナル diagram ハ regular デアル逆モ成立スル。

故ニS_nハ $n=k(k+1)/2$ ナルトキニ限リ

regular diagram ヲ只一ツモツ、即チ

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=k(k+1)/2 \text{ ナルトキ}\\ 0 & n\neq k(k+1)/2 \text{ ナルトキ}\end{cases} \tag{22}$$

$\boxed{\text{定理7}}$ S_n ノ既約表現ノ個数ハ $n-2l=k(k+1)/2$ ($k=0,1,2,\cdots\cdots$) ヲ満足スル l ヲ $0\leqq l_1<l_2<\cdots\cdots<l_t$ トスレバ次式ニテ与ヘラル。

$$N(n)=\sum_{i=1}^{t}M(l_i)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{r=0}^{l_i}N(r)N(l_i-r) \tag{23}$$

(証明) (21), (22) ヨリ直ニ得ラレル

(例) S_9: $l_1=3$, $l_2=4$

$N(9)=N(0)N(4)+N(1)N(3)+N(2)N(2)+N(1)N(3)$

$+N(0)N(4)+N(0)N(3)+N(1)N(2)+N(2)N(1)+N(3)$

$N(0) = 30$

定理7ニヨリS_{20}マデノ既約表現ノ個数ヲ求メレバ次ノ表ヲ得ル、

$M(l)=\sum_{r=0}^{l}N(r)N(l-r)$ トスレバ

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(l)$	1	2	5	10	20	36	65	110	185	300	481

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

§5. S_n ノ自己共軛既約表現ノ個数. $T=\tilde{T}$ ナル diagram ヲ自己共軛 diagram トイフコトハ既ニ§1デ述ベタガ、自己共軛 diagram ニハ自己共軛既約表現ガ対應スルコトハ良ク知ラレテヰル、以下自己共軛 diagram ヲ Δ デ表ハス、Δ ノ α-数、γ-数ヲ (α_i), (γ_j) トスレバ

(24) $\quad \alpha_1=\gamma_1,\ \alpha_2=\gamma_2,\ \cdots\ \alpha_k=\gamma_k$

Δ ニ於テ (i,i), $(i=1,2,\cdots\cdots)$ ナル座標ヲモツ文字ノ個数ヲ Δ ノ対角線ノ長サト云フ。

Δ ノ対角線ノ長サガ γ ナルトキハ

(25) $\qquad \alpha_{r+1} = \gamma_{r+1} \leqq r$

が成立スル。 $\Delta(1, r+1) = \tilde{\Delta}(r+1, 1)$ ナル故、Δ ハ r ト $\Delta(r+1, 1)$ ニヨリ一意的ニ決定サレル。故ニ $\Delta = (r, \Delta^*)$ ト表ハスコトニスル、 但シ $\Delta^* = \Delta(1, r+1)$ デアル。Δ^* ヲ Δ ノ characteristic diagram トイフ。 従ツテ Δ ノ構造ハ Δ^* ノ normal hook ニヨル分解ニヨリ分カルワケデアル。

(例)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{r}} & \multicolumn{3}{c}{\Delta^*} \\
 & * & * & * & \circ & \circ & \circ \\
 & * & * & * & \circ & & \\
 & * & * & * & & & \\
 & \circ & \circ' & & & & \\
\tilde{\Delta}^* & \circ & & & & & \\
 & \circ & & & & &
\end{array}
$$

$\boxed{\text{定理8}}$ Δ ノ kernel Δ_0 ハ又自己共軛デアル

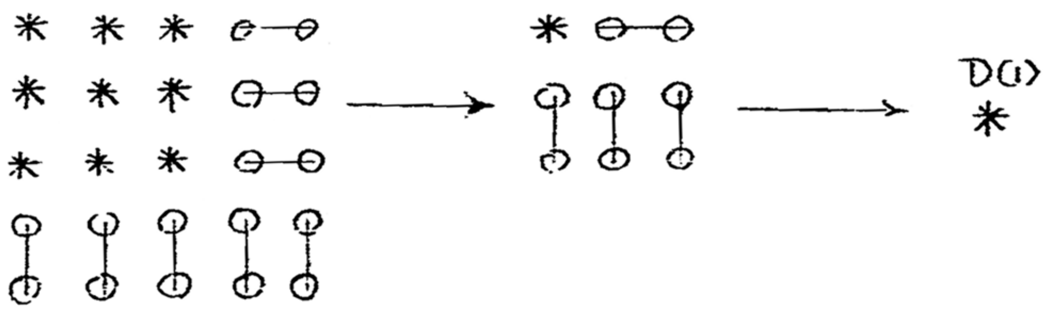
(証明) Δ ガ座標 (i, i) ナル lp-hook H ヲモテバ $\Delta - H$ ハ自己共軛デアル。次ニ Δ ガ (i, j), $(i \neq j)$ ナル座標ノ lp-hook H ヲモテバ、Δ ハ又 (j, i) ナル座標ノ lp-hook $\tilde{H}$ ヲモツ. $r < i$ ナルトキハ H ト $\tilde{H}$ ハ独立トナリ $(T-H)-\tilde{H}$ ハ自己共軛 $i < r, j \leqq r$ ナルトキハ $T-H$ ハ $(j-1, i)$ ナル座標ヲモツ lp-hook $\tilde{H}^*$ ヲモツ、且ツ $(T-H)-\tilde{H}^*$ ハ自己共軛デアル $i \leqq r, j < r$ ナル場合及ビ $r < j$ ナル場合モ同様デアル。

以下又$p=2$トスル. regular diagram $T(k, k-1, \cdots, 2.1)$ハ自己共軛デアル。Tハkニヨリ一意的ニ決定サレル故 $T=D(k)$デ表ハス自己共軛 diagram ヲ表ハス我々ノ記法ニヨレバ

(26) $$D(2s)=(s, D^*(s))$$
$$D(2s+1)=(s+1, D^*(s-1))$$

Lemma 12. $\Delta(\overbrace{\alpha, \alpha, \cdots, \alpha}^{\alpha個})$ナル正方形状ノ diagram ノ kernel ハ $\alpha=2m$ ナルトキ $D(0)$, $\alpha=2m+1$ ナルトキ $D(1)$ トナル。

(証明) 次ノ例ニヨリ明カデアル。



定理 9 $D(k)$ ヲ kernel トスル自己共軛 diagram ヲ Δトスル、Δノ characteristic diagram Δ^*ノ kernel ハ $D(k)$ノ characteristic diagram デアル。

(証明) Δ^*ノ kernel ヲ $D(s)$トスレバ Δ^*及ビ $\tilde{\Delta}^*$ カラ長サガ偶数ナル hook ヲ取去ルコトニヨリ Δ^*, $\tilde{\Delta}^*$

$\longrightarrow D(s)$ ナルトキ $\Delta=(r,\Delta^*)\longrightarrow\Delta'=(r,D(s))$ トナル、$\Delta'(r+1,r+1)$ ニ Lemma 12 ヲ適用スルコトニヨリ $r-s=2\lambda$ ナルトキハ $\Delta'(r+1,r+1)$ ノ kernel ハ $D(0)$、故ニ $\Delta'(r+1,r+1)\longrightarrow D(0)$ ナルトキ $(r,D(s))\longrightarrow\Delta''=(s,\Delta(r,r-1,\cdots,r-s+1))$ トナル、$\Delta(r,r-1,\cdots,r-s+1)$ ノ kernel ハ明カニ $D(s)$ ナル故，$\Delta(r,r-1,\cdots,r-s+1)$，$\tilde{\Delta}(r,r-1,\cdots,r-s+1)\longrightarrow D(s)$ ナルトキ $\Delta''\longrightarrow\Delta'''=(s,D(s))$ トナル。Δ''' ハ regular デアルカラ Δ ノ kernel デアル。即チ Δ^* ノ kernel $D(s)$ ハ Δ''' ノ characteristic diagram トナル。
次ニ $r-s=2\lambda+1$ ナルトキハ

$$\Delta\longrightarrow\Delta'=(r,D(s))\longrightarrow\Delta''=(s+1,\Delta(r-1,r-2,\cdots,r-s))\longrightarrow\Delta'''(s+1,D(s))$$

トナリ Δ^* ノ kernel $D(s)$ ハ Δ ノ kernel Δ''' ノ characteristic diagram デアル

(例)

$$\begin{array}{c}\Delta\\ \begin{array}{llllllll}\ast&\ast&\ast&\ast&\circ&\circ&\circ&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast&\circ&\circ&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast&\circ\\ \circ&\circ&\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ \circ&\circ\\ \circ\end{array}\end{array}\longrightarrow\begin{array}{c}\Delta'\\ \begin{array}{llllll}\ast&\ast&\ast&\ast&\circ&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast\\ \ast&\ast&\ast&\ast\\ \circ&\circ\\ \circ\end{array}\end{array}\longrightarrow\begin{array}{c}\Delta''\\ \begin{array}{llllll}\ast&\ast&\ast&\ast&\circ&\circ\\ \ast&\ast&\ast&\ast&\circ\\ \ast&\ast\\ \ast&\ast\\ \circ&\circ\\ \circ\end{array}\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \Delta''' \\
\qquad\quad * \; * \; \circ \; \circ \\
\longrightarrow \; * \; * \; \circ \\
\qquad\quad \circ \; \circ \\
\qquad\quad \circ
\end{array}
$$

<u>Lemma 13</u>　Δノ長サガ偶数ナル hook ノ座標ヲ(i,j)トスレバ $i \neq j$ デアル。

（証明）　hook Hノ長サヲg, 高サヲhトスレバ $i=j$ ナルトキハ $g=2h-1$ トナリ奇数トナル。

<u>Lemma 14</u>　$D(k)$ヲ kernel トスル自己共軛 diagram Δノ対角線ノ長サヲrトスレバ$r-r'$ハ偶数デアル。但シr'ハ$D(k)$ノ対角線ノ長サトスル。

（証明）　Δカラ$D(k)$ニ到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ハ Lemma 13 ニヨリ偶数デアルカラ、コレヲ$2l$トスル。又Δ^*カラ$D^*(k)$ニ到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ヲtトスレバ

$$r^2 - r'^2 = 4(l-t)$$

ガ成立スル、故ニ$r-r'$ハ偶数デアル。

愈々我々ノ目的ナルΔノ構造ヲ調ベルコトニスル。Δカラ、ソノ kernel $D(k)$ニ到達スルマデニ取去ルベキ長サ2ノ hook ノ個数ヲ$2l$トスル、Δ, $D(k)$

ノ対角線ノ長サヲ r, r' トスレバ Lemma 14 ニヨリ $r=r'+2\lambda$ デアル。Δ ノ characteristic diagram $\Delta^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_k^*)$ ノ normal hook ニヨル分解ヲ

(27) $\quad \Delta^* = \Delta_0^* \oplus H_s(l_s, \nu_s) \oplus \cdots\cdots \oplus H_1(l_1, \nu_1)$

$(\nu_i = 1$ 又ハ $2)$

トスル。従ッテ Δ^* ニ対應スル数系ヲ

(28) $\quad (l_1^{(1)} \geqq l_2^{(1)} \geqq \cdots\cdots \geqq l_s^{(1)} \geqq 0,\ 1),\ (l_1^{(2)} \geqq l_2^{(2)} \geqq \cdots\cdots \geqq l_{s_2}^{(2)} \geqq 0, 2)$ トスレバ (25) ニヨリ $\alpha_1^* \leqq r$ ナル故

(29) $\quad l_1^{(1)} \leqq r'+\lambda\ ,\quad l_1^{(2)} \leqq \lambda$

ガ成立スル。又

(30) $\quad l^* = \sum_i l_i^{(1)} + \sum_i l_i^{(2)}$

トスレバ $r^2 - r'^2 = 4(l-l^*)$ ナル故

(31) $\quad l^* = l - \lambda(r'+\lambda)$

トナル、以上ニヨリ次ノ定理ヲ得ル

$\boxed{\text{定理 10}}$ $D(k)$ ヲ kernel トスル自己共軛 diagram Δ ノ characteristic diagram Δ^* ニ対應スル数系 (28) ハ (29), (31) ノ條件ヲ満足シナクテハナラナイ。

今 S_n ノ diagram ノ中 $\alpha_1 \leqq \rho$ ナルモノノ個数ヲ $N_\rho(n)$ デ表ハスコトニスレバ (29), (31) ヲ満足スル数系 (28) ノ個数ハ

(32) $\quad \sum_{i=0}^{l^*} N_{r'+\lambda}(i) N_\lambda(l^*-i),\quad l^* = l - \lambda(r'+\lambda)$

トナル、即チ$D(k)$ヲkernelトシ対角線ノ長サガr'ナルS_nノ自己共軛diagramノ個数ハ(32)ニテ与ヘラレル。但シ$n=4l+k(k+1)/2$トスル。
故ニ

<u>Lemma 15</u>　$D(k)$ヲkernelトスルS_n，$(n=4l+\frac{k(k+1)}{2})$ノ自己共軛diagramノ個数ハ

$$(33)\quad \overline{N}(l)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda^*}\sum_{i=0}^{l-\lambda(r'+\lambda)}N_{r'+\lambda}(i)N_\lambda\{l-\lambda(r'+\lambda)-i\}$$

ニ等シイ。　但シλ^*ハ$0\leqq l-\lambda(r'+\lambda)$ヲ満足スル最大ノ$\lambda$デアル。

<u>以下$\overline{N}(l)$ガS_lノdiagramノ個数$N(l)$ニ等シイコトヲ証明スル。</u>　S_lノdiagram Tノα-数，γ-数ヲ夫々$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$：$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$トスル　r'ヲ与ヘラレタ数トスルトキTガ

$$(34)\quad \alpha_{r'+\lambda+1}\leqq\lambda,\quad \gamma_{\lambda+1}\leqq r'+\lambda$$

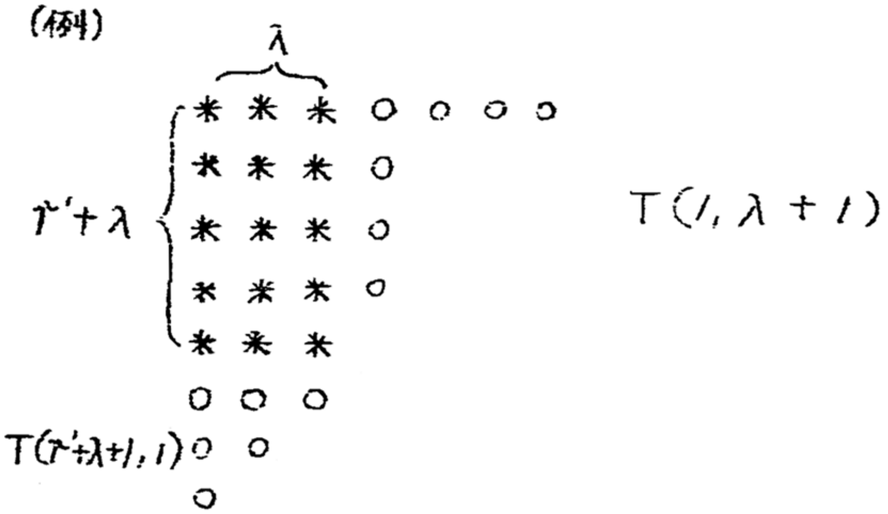
ヲ満足スルトキハ$T(1,\lambda+1)$ノ第一列ノ文字ノ個数ハ$r'+\lambda$ヨリ大ニハナレナイ。同様ニ$T(r'+\lambda+1,1)$ノ第一行ノ文字ノ個数ハλヨリ大ニナレナイ。従ツテ

(34)ナル條件ヲ満足スルS_lノdiagramノ個数ハ

$$(35)\quad \sum_{i=0}^{l-\lambda(r'+\lambda)}N_{r'+\lambda}(i)N_\lambda\{l-\lambda(r'+\lambda)-i\}$$

トナル。

(例)



故ニ(35)ヨリλヲ動カスコトニヨリ

$$N(\ell)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda^*}\sum_{i=0}^{\ell-\lambda(r'+\lambda)} N_{r'+\lambda}(i)N_{\lambda}(\ell-\lambda(r'+\lambda)-i)=\bar{N}(\ell)$$

ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理 11}}$ $D(k)$ヲkernelトスルS_nノ($n=4\ell+\frac{k(k+1)}{2}$)ノ自己共軛diagramノ個数ハS_ℓノdiagramノ個数$N(\ell)$ニ等シイ

定理11ヨリ直チニ我々ノ目的ナル次ノ定理ヲ得ル

$\boxed{\text{定理 12}}$ $n-4\ell=k(k+1)/2,\ (k=0,1,2,\cdots)$ ヲ満足スルℓヲ$0\leqq \ell_1<\ell_2<\cdots<\ell_m$トスレバ$S_n$ノ自己共軛diagramノ個数$N^*(n)$ハ

(36) $$N^*(n)=\sum_{i=1}^{m}N(\ell_i)$$

トナル

(例) S_{15}: $\ell_1=0,\ \ell_2=3$

$$N^*(15)=N(0)+N(3)=4$$

既ニS_{20}マデハ$N(20)$ガ求メテアルカラ$N^*(83)$マデバ計算出来ルワケデアルガ、コヽニハS_{10}ヨリ

S_{40} マデノ $N^{*}(n)$ ノ値ヲ求メテ見タ。

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$N^{*}(n)$	2	2	3	3	3	4	5	5	5	6	7	8	8	9	11	12	12

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
14	16	17	18	20	23	25	26	29	33	35	37	41	46

（脚註）

(1) 中山正： On some modular prperties of isse ducible representotions of a symmetric group I.II. 輯報第17巻以後 中山I, 中山IIトシテ引用スル。

(2) 中山II p.423